M_2°, когда существует линейчатая квадрика $\widetilde{Q}$, которую огибают гиперболические параболоиды Q, причем в каждой точке $A \in \widetilde{Q}$ параболоиды Q и квадрика $\widetilde{Q}$, касаясь друг друга, имеют общими только пару прямолинейных образующих ℓ_1, ℓ_2, пересекающихся в точке A.

Доказательство. Необходимость. Пусть конгруэнция M_2 является конгруэнцией M_2°. Используя уравнения (3.3), убеждаемся, что квадрика $\widetilde{Q}$

$$\Phi \equiv x^1 x^2 - x^3 - \frac{1}{2} m (x^3)^2 = 0 \qquad (3.4)$$

является инвариантной. Система уравнений, определяющая линию пересечения квадрик $\widetilde{Q}$ и Q, имеет вид:

$$x^3 = x^1 x^2, \quad (x^3)^2 = 0, \qquad (3.5)$$

т.е. квадрики $\widetilde{Q}$ и Q имеют общими только прямые ℓ_1, ℓ_2.

Достаточность. Пусть существует линейчатая квадрика $\widetilde{Q}$ такая, что конгруэнция M_2 образована гиперболическими параболоидами Q, касающимися квадрики $\widetilde{Q}$, причем общие точки квадрик Q и $\widetilde{Q}$ образованы только прямолинейными образующими ℓ_1, ℓ_2, пересекающимися в точке A касания квадрик Q и $\widetilde{Q}$. В репере $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{\ell}_i$ направлены по прямым ℓ_i, а $\bar{e}_3$ - по диаметру параболоида Q, уравнения квадрик Q и $\widetilde{Q}$ имеют вид (3.1) и (3.4). Условие

$$d\Phi = \lambda \Phi$$

инвариантности квадрики $\widetilde{Q}$ приводит к пфаффовым уравнениям (3.3), характеризующим конгруэнции M_2°.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Тр. Моск. мат. об-ва", 1953, 12, 275-382.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В., Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. "Тр. геом. семинара ВИНИТИ", 1974, 6, 113-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 7 1976

УДК 513.73

В.М. Овчинников

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Изучается локальное дифференцируемое отображение Ψ точечного проективного пространства P_N $(N = 2n-1)$ в пространство гиперплоскостных элементов [1] проективного пространства P_n. Во второй дифференциальной окрестности исследованы геометрические образы, ассоциированные с распределением гиперплоскостей и связанные с дифференцируемым отображением Ψ.

§1. Система дифференциальных уравнений отображения Ψ

Пусть P_n - n-мерное проективное пространство, p и π - соответственно его точка и инцидентная ей гиперплоскость. Имеем

$$N = \operatorname{rang}(p, \pi) = 2n-1.$$

Будем рассматривать дифференцируемое отображение Ψ некоторой области $V \subset P_n$ в пространство гиперплоскостных элементов.

Отображение Ψ определим следующим образом: $\Psi_1(L) = p$, $\Psi_2(L) = \pi$, причем

$$\Psi(L) = (p, \pi), \quad L \in V, \quad p \in \Psi_2(L).$$

$$+(\Lambda^n_{\mathcal{J}}\Lambda^n_{\varkappa}-\Lambda^n_{\mathcal{J}\varkappa})\omega^n_n+\Lambda^j_{\mathcal{J}}\Lambda^n_{\varkappa}\omega^0_j+\Lambda^n_{\mathcal{J}}\Lambda^n_{\varkappa}\omega^0_n+\Lambda^n_{\mathcal{J}\varkappa\varkappa}\Omega^{\varkappa}_0;$$

$$d\Lambda^n_{i\mathcal{J}}=\Lambda^n_{i\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}-\Lambda^n_{i\mathcal{J}}(\Omega^0_0+\omega^n_n)+\Lambda^n_{j\mathcal{J}}\omega^j_i+\Lambda^n_{\mathcal{J}}\omega^0_i+\Lambda^n_{i\mathcal{J}\varkappa}\Omega^{\varkappa}_0;$$

$$d\Lambda^n_{i\mathcal{J}\varkappa}=\Lambda^n_{i\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\varkappa}+\Lambda^n_{i\varkappa\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}-2\Lambda^n_{i\mathcal{J}\varkappa}\Omega^0_0-\Lambda^n_{i(\varkappa}\Omega^0_{\mathcal{J})}+$$

$$+(\Lambda^n_{j\mathcal{J}\varkappa}-\Lambda^n_{\mathcal{J}}\Lambda^n_{j\varkappa})\omega^j_i+\Lambda^n_{\varkappa}\Lambda^n_{i\mathcal{J}}\omega^0_n+\Lambda^n_{i\mathcal{J}}\Lambda^n_{j\varkappa}\omega^j_n+$$

$$+(\Lambda^n_{\mathcal{J}\varkappa}-\Lambda^n_{j\mathcal{J}}\Lambda^j_{\varkappa})\omega^0_i+(\Lambda^n_{\mathcal{J}}\Lambda^n_{i\varkappa}-\Lambda^n_{i\mathcal{J}\varkappa})\omega^n_n+\Lambda^n_{i\mathcal{J}\varkappa\varkappa}\Omega^{\varkappa}_0.$$

§2. Отображения Ψ_1

Рассмотрим дифференцируемое точечное отображение

$$\Psi_1(M_0)=A_0,\quad M_0\in V\subset P_N,\quad A_0\in P_n.$$

К каждой точке M_0 присоединим репер $\{M_1,\dots,M_N\}$ первого порядка, где точки $\{M_1,\dots,M_n\}$ лежат в касательной плоскости поверхности V_n в точке M_0, причем отображение Ψ_1 является сужением отображения ψ_1 на V_n, что обозначим Ψ_1/V_n. Тогда сужение отображения Ψ_1/V_n выделяет проективное соответствие между направлениями в точке M_0 и направлениями в точке A_0, лежащими в гиперплоскости π. Считаем, что направления $M_0M_{\bar\imath}$ и $A_0A_{\bar\imath}$ соответствуют в этом проективитете. Из системы (I.3) получаем, что дифференциальные уравнения отображения Ψ_1/V_n примут вид:

$$\omega^{\bar\imath}_0=\Omega^{\bar\imath}_0,\quad \Omega^{\alpha}_0=0,$$
$$\omega^n_i=\Lambda^n_{i\bar j}\Omega^{\bar j}_0, \tag{2.1}$$

где $\alpha,\beta,\gamma=n+1,\dots,N$.

Продолжая уравнения системы (2.I), получим:

$$\Omega^{\bar\imath}_{\bar j}-\delta^{\bar\imath}_{\bar j}\Omega^0_0-\omega^{\bar\imath}_{\bar j}+\delta^{\bar\imath}_{\bar j}\omega^0_0=\Lambda^{\bar\imath}_{\bar j\bar k}\Omega^{\bar k}_0, \tag{2.2}$$

Выбираем в пространствах P_N и P_n подвижные реперы $M=\{M_{\mathcal{J}'}\}$, $(\mathcal{J}',\varkappa'=0,1,\dots,N)$ и $A=\{A_{i'}\}$, $(i',j'=0,1,\dots,n)$ с деривационными формулами

$$dM_{\mathcal{J}'}=\Omega^{\varkappa'}_{\mathcal{J}'}M_{\varkappa'},\quad dA_{i'}=\omega^{j'}_{i'}A_{j'}, \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа $\Omega^{\varkappa'}_{\mathcal{J}'}$, $\omega^{j'}_{i'}$ удовлетворяют уравнениям структуры Маурера-Картана

$$\mathcal{D}\Omega^{\varkappa'}_{\mathcal{J}'}=\Omega^{\varkappa'}_{\mathcal{J}'}\wedge\Omega^{\varkappa'}_{\varkappa'},\quad \mathcal{D}\omega^{j'}_{i'}=\omega^{k'}_{i'}\wedge\omega^{j'}_{k'}. \tag{1.2}$$

Поместим вершину M_0 в произвольную точку области V, вершину A_0 в точку $\psi_1(M_0)\in\pi$, а вершины $M_{\bar\imath}$ $(\bar\imath,\bar j=1,2,\dots,n)$ в гиперплоскость $\pi=\varphi_2(M_0)$.

Система дифференциальных уравнений отображения Ψ запишется в виде

$$\omega^i_0=\Lambda^i_{\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0,\quad \omega^n_0=\Lambda^n_{\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0,\quad \omega^n_i=\Lambda^n_{i\mathcal{J}}\Omega^{\mathcal{J}}_0, \tag{1.3}$$

где

$$(\mathcal{J},\mathcal{J},\varkappa=1,2,\dots,N;\ i,j,k=1,2,\dots,n-1).$$

Система величин $\Gamma_1=\{\Lambda^{\bar\imath}_{\mathcal{J}},\Lambda^n_{\mathcal{J}},\Lambda^n_{i\mathcal{J}}\}$ образует фундаментальный геометрический объект I-го порядка отображения Ψ. Компоненты фундаментального объекта 2-го порядка $\Gamma_2=\{\Gamma_1,\Lambda^{\bar\imath}_{\mathcal{J}\varkappa},\Lambda^n_{i\mathcal{J}\varkappa}\}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$d\Lambda^i_{\mathcal{J}}=\Lambda^i_{\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^i_{\mathcal{J}}(\omega^0_0-\Omega^0_0)-\Lambda^j_{\mathcal{J}}\omega^i_j-\Lambda^n_{\mathcal{J}}\omega^i_n+\Lambda^i_{\mathcal{J}\varkappa}\Omega^{\varkappa}_0,$$

$$d\Lambda^n_{\mathcal{J}}=\Lambda^n_{\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^n_{\mathcal{J}}(\omega^0_0-\Omega^0_0)-\Lambda^n_{\mathcal{J}}\omega^n_n+\Lambda^n_{\mathcal{J}\varkappa}\Omega^{\varkappa}_0,$$

$$d\Lambda^i_{\mathcal{J}\varkappa}=\Lambda^i_{\mathcal{J}\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\varkappa}+\Lambda^i_{\varkappa\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}-\Lambda^i_{(\varkappa}\Omega^0_{\mathcal{J})}+\Lambda^i_{\mathcal{J}\varkappa}(\omega^0_0-2\Omega^0_0)- \tag{1.4}$$

$$-\Lambda^j_{\mathcal{J}\varkappa}\omega^i_j-\Lambda^n_{\mathcal{J}\varkappa}\omega^i_n+\Lambda^j_{\mathcal{J}}\Lambda^i_{\varkappa}\omega^0_j+\Lambda^n_{\mathcal{J}}\Lambda^i_{\varkappa}\omega^0_n+\Lambda^i_{\mathcal{J}\varkappa\varkappa}\Omega^{\varkappa}_0,$$

$$d\Lambda^n_{\mathcal{J}\varkappa}=\Lambda^n_{\mathcal{J}\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\varkappa}+\Lambda^n_{\varkappa\varkappa}\Omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}-\Lambda^n_{(\varkappa}\Omega^0_{\mathcal{J})}+\Lambda^n_{\mathcal{J}\varkappa}(\omega^0_0-2\Omega^0_0)+$$

$$\Omega^{\alpha}_{\bar{i}} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{k}} \Omega^{\bar{k}}_{0},$$

$$d\Lambda^{n}_{i\bar{j}} = \Lambda^{n}_{i\bar{k}} \Omega^{\bar{k}}_{\bar{j}} - \Lambda^{n}_{i\bar{j}} (\Omega^{0}_{0} + \omega^{n}_{n}) + \Lambda^{n}_{j\bar{j}} \omega^{j}_{i} + \\ + \delta^{n}_{\bar{i}} \Lambda^{\bar{i}}_{\bar{j}} \omega^{0}_{i} + \Lambda^{n}_{i\bar{j}\bar{k}} \Omega^{\bar{k}}_{0}.$$

Осуществляя последовательные продолжения системы (2.2), получим фундаментальную последовательность геометрических объектов отображения $\Psi_1/_{V_n}$:

$$\Lambda^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}, \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{k}}, \Lambda^{n}_{i\bar{j}}, \ldots$$

Асимптотический конус для многообразия $\Psi^{-1}(\Psi_1(M_0))/_{V_n}$ в точке M_0 будет иметь вид:

$$\Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}} X^{\bar{i}} X^{\bar{j}} = 0, \quad X^{\alpha} = 0. \tag{2.3}$$

Базисная гиперквадрика инвариантного (n-I)-параметрического линейного семейства гиперквадрик, соприкасающихся в точке M_0 с многообразием $\Psi^{-1}(\Psi_1(M_0))/_{V_n}$, имеет вид:

$$\Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{k}} X^{\bar{i}} X^{\bar{k}} - 2 X^{\alpha} X^{0} = 0.$$

Список литературы

I. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. Тр.геом.семинара ВИНИТИ, I973, 4, с.7I-I20.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-"Итоги науки" ВИНИТИ, Геометрия, I963, с.65-I07.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 I976

УДК 5I3.73

Н.Д.Поляков

СВЯЗНОСТИ НА ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

I. Рассмотрим нечетномерное дифференцируемое многообразие M_{n+1} $(n = 2q)$. Пусть на M_{n+1} задана почти контактная структура , т.е. дифференциально-геометрическая структура I порядка [3] со структурными объектами $\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$, $\xi^{\mathcal{J}}$, $\eta_{\mathcal{K}}$. Компоненты структурных объектов удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \varphi^{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}} = -\delta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} + \xi^{\mathcal{J}} \eta_{\mathcal{L}}, \\ \varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \eta_{\mathcal{J}} = 0, \quad \varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \xi^{\mathcal{J}} = 0, \quad \xi^{\mathcal{J}} \eta_{\mathcal{J}} = 1. \tag{I}$$

Автором показано [4] , что на почти контактном многообразии M_{n+1} при дополнительном оснащении полем объекта $\{ F^{n+1}_{ij} \}$ возможно определить внутренним образом аффинную связность Γ без кручения. Поэтому в дальнейшем будем считать, что M_{n+1} снабжено такой аффинной связностью. Рассмотрим присоединенное расслоенное пространство $L_{n+1,n+1}$, базой которого является исходное многообразие M_{n+1} , снабженное связностью Γ, слоями которого являются касательные пространства T_x к базе. $(\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1;\ i, j, \ldots = 1, 2, \ldots n)$.

Предположим теперь, что в пространстве $L_{n+1,n+1}$ определено аналитическое сечение (поле точек), т.е. в каждом слое определена точка M -центр слоя. При фиксации